Ensembles définissables dans les corps ordonnés différentiellement clos.

Françoise Point [a]

[a] *F.R.S.-F.N.R.S., Département de Mathématique, Université de Mons, 20, Place du Parc, B-700 Mons, Belgique.*

Reçu le *****;

Résumé

On montre que la théorie des corps ordonnés différentiellement clos est définissablement complète et uniformément finie. On en déduit, utilisant un résultat de Dolich, Miller et Steinhorn ([3]) que son coeur ouvert est o-minimal.

Abstract

On differentially closed ordered fields. We prove that the theory of ordered differentially closed fields is definably complete and uniformly finite. We deduce that its open core is o-minimal using a recent result of Dolich, Miller and Steinhorn ([3]).

1. Introduction

M. Singer a montré que la modèle-complétion de la théorie des corps ordonnés munis d'une dérivée D existe et l'a axiomatisée ; on notera cette axiomatisation $CODF$ ([8]).

Récemment, C. Michaux et C. Rivière ont montré que cette théorie n'a pas la propriété d'indépendence ([6]) et avec T. Brihaye ont démontré un résultat de décomposition cellulaire ([2]).

Ici nous montrerons que le coeur ouvert d'un modèle de $CODF$ est o-minimal. Si $\mathcal{K} := (K, +, 0, <, \cdots)$ est une $\mathcal{L}$-structure qui est une expansion d'un groupe abélien totalement ordonné de façon dense, alors le coeur ouvert $\mathcal{K}^o$ de $\mathcal{K}$ est la structure dont le domaine est K et les relations sont tous les ouverts définissables (avec paramètres) de $\mathcal{K}$ (voir [3]).

Nous utiliserons le résultat de A. Dolich, C. Miller et C. Steinhorn suivant. Si $\mathcal{K}$ satisfait les deux conditions suivantes (UF) et (DC), alors son coeur ouvert est o-minimal (voir [3] Theorem A).

Email address: `point@logique.jussieu.fr` (Françoise Point).

Définition 1.1 *$\mathcal{K}$ est définissablement complète (DC) si tout sous-ensemble définissable inclus dans K a à la fois un supremum et un infimum dans $K \cup \{\pm\infty\}$.*
Définition 1.2 *$\mathcal{K}$ est uniformément finie (UF) si pour tout $m, n \in \omega^*$, tout sous-ensemble définissable A de $K^m \times K^n$, il existe $N \in \omega$ tel que pour tout $\bar{x} \in K^m$, soit $A_{\bar{x}} := \{\bar{y} \in K^n : (\bar{x}, \bar{y}) \in A\}$ est infini ou est fini de cardinalité $\leq N$.*
Il est facile de voir que pour montrer que $\mathcal{K}$ est uniformément finie, il suffit de le prouver pour les sous-ensembles inclus dans $K^m \times K$.

Toute théorie o-minimale T étendant un ordre dense a ces deux propriétés (UF) et (DC) (voir [4]). On utilisera que la théorie des corps réels-clos RCF satisfait ces deux propriétés.

Dans la preuve du lemme principal, nous utiliserons le théorème de décomposition cellulaire pour les sous-ensembles définissables d'un modèle $\mathcal{M}$ de T. Une cellule de M^m est une $(i_1, \cdots, i_m)$-cellule, pour une certaine suite $(i_1, \cdots, i_m)$ de 0 et de 1 et est décrite par induction sur m (voir Definition 2.3 [4]). Le théorème de décomposition cellulaire est démontré par induction et une des étapes consiste à montrer la propriété (UF).

Nous utiliserons la conséquence suivante du théorème de décomposition cellulaire, que nous appellerons la propriété (UCD) : si S est un sous-ensemble définissable inclus dans M^{n+m}, alors le nombre de cellules apparaisant dans la fibre $S_{\bar{y}}$ est fini et borné indépendamment de $\bar{y} \in M^m$ (et donc le nombre de composantes définissablement connexes est uniformément borné) ([4] Corollary 3.6 chapter 3).

Enfin, nous utiliserons la description (le *démontage*) des ensembles semi-algébriques dans un corps réel-clos K (voir [1] Théorèmes 2.3.1, 2.3.6 ou bien [4] Theorem 2.7 chapter 2), que nous rappelons ci-dessous.
Théorème 1.3 ([1] Théorèmes 2.3.1, 2.3.6, [4] Theorem 2.7 chapter 2.) *Etant donné un nombre fini de polynômes $p_1(\bar{X}, Y), \cdots, p_s(\bar{X}, Y) \in K[\bar{X}, Y]$, que l'on suppose clos par dérivation par rapport à la dernière variable Y, il existe une partition finie de K^n en sous-ensembles semi-algébriques $A_1, \cdots, A_m$ et un nombre fini de fonctions continues semi-algébriques $\xi_{i,j}$ de A_i dans K avec $\xi_{i,1} < \cdots < \xi_{i,\ell_i}$, $1 \leq j \leq \ell_i$, $1 \leq i \leq m$, telles que*

- *(i) pour tout $\bar{x} \in A_i$, l'ensemble $\{\xi_{i,1}(\bar{x}), \cdots, \xi_{i,\ell_i}(\bar{x})\}$ est l'ensemble des zéros des polynômes non nuls parmi $p_1(\bar{x}, Y), \cdots, p_s(\bar{x}, Y)$.*
- *(ii) Pour tout $\bar{x} \in A_i$, les signes des $p_k(\bar{x}, Y)$, $1 \leq k \leq s$, ne dépend que du signe de $Y - \xi_{i,j}(\bar{x})$, $1 \leq j \leq \ell_i$.*

En particulier, le graphe de chaque $\xi_{i,j}$ est contenu dans les zéros d'un p_k dépendant de i, j.

2. Corps ordonnés différentiels.

Dans cette section, $\mathcal{K} = (K, +, -, ., ^{-1}, D, <, 0, 1)$ est un corps commutatif totalement ordonné différentiel, sans à priori d'intéraction entre la dérivée et la topologie de l'ordre. Nous supposerons désormais que $\mathcal{L}$ est le langage des corps ordonnés et $\mathcal{L}_D$ le langage $\mathcal{L} \cup \{D\}$, où D est un nouveau symbole de fonction unaire, interprété par une dérivation dans K. Pour $a \in K$ (ou x une variable), on notera $D(a) = a^{(1)}$ (respectivement $D(x) = x^{(1)}$). Rappelons que dans la théorie $CODF$, toute $\mathcal{L}_D$-formule est équivalente à une $\mathcal{L}_D$-formule sans quantificateurs. (En effet, $CODF$ est la modèle-complétion d'une théorie universelle). Notons que le réduit de $\mathcal{K}$ à sa structure de corps est définissable dans $\mathcal{K}^o$ ([3]).

Notation et terminologie Soit $K\{X_1, \cdots, X_n\}$ l'anneau des polynômes différentiels sur K en n indéterminées différentielles $X_1, \cdots, X_n$ sur K, c.a.d. l'anneau des polynômes en les indéterminées $X_i^{(j)}$, $1 \leq i \leq n$, $j \in \omega$, avec la convention : $X_i^{(0)} := X_i$. Soit $\mathbf{X} := X_1, \cdots, X_n$ et soit $f(\mathbf{X}) \in K\{\mathbf{X}\} - K$ d'ordre m, f peut s'écrire $f(\mathbf{X}) = f^*(X_1, \ldots, X_1^{(m)}, \cdots, X_n, \ldots, X_n^{(m)})$, où $f^*(X_1, \cdots, X_{n.(m+1)})$ est un polynôme appartenant à $K[X_1, \cdots, X_{n.(m+1)}]$. On fera l'abus de notation : si $b \in K^n$, alors $f^*(b)$ est l'élément de K obtenu en évaluant le polynôme f^* au $n.(m+1)$-uplet $(b_1, \cdots, b_1^{(m)}, \cdots, b_n, \cdots, b_n^{(m)})$. Si $n = 1$, rappelons que le séparant s_f de f est défini comme $s_f := \frac{\partial f}{\partial X_1^{(m)}}$.

Une axiomatisation des modèles $\mathcal{K}$ de $CODF$ consiste en le schéma d'axiomes suivants : $\mathcal{K} \models RCF$ et pour tout polynôme différentiel $f(X) \in K\{X\}$ (à une indéterminée) d'ordre m, s'il existe un $m+1$-uplet $\bar{a} := (a_0, a_1, \cdots, a_m)$ tel que $f^*(\bar{a}) = 0$ alors pour tout $\epsilon > 0$ il existe b tel que $f(b) = 0$ et $\bigwedge_{i=0}^{m} |a_i - b^{(i)}| < \epsilon$. (Ce n'est pas l'axiomatisation donnée par Singer, mais il est facile de voir que les deux axiomatisations sont équivalentes.)

Soit $\phi(x_1, \cdots, x_n)$ une $\mathcal{L}_D$-formule ouverte, pour tout x_i, $1 \leq i \leq n$, soit m_i le nombre naturel maximal m tel que $x_i^{(m)}$ apparaît dans une sous-formule atomique. Alors on note par $\phi^*((x_{i,j})_{i=1,j=0}^{n,m_i})$ la $\mathcal{L}$-formule obtenue à partir de ϕ en remplaçant chaque $x_i^{(j)}$ par $x_{i,j}$. Soit $N := \sum_{i=1}^{n} m_i + n$ et si S est le sous-ensemble de K^n défini par ϕ, on note par S^{alg} le sous-ensemble de K^N défini par ϕ^*. (On utilisera la notation $S = \phi(K)$ et $S^{alg} = \phi^*(K)$.) On a que $\mathcal{K} \models \forall x\ (\phi(x) \leftrightarrow \phi^*((x_i^{(j)})_{i=1,j=0}^{n,m_i}))$.

On dira qu'un élément de K^{n+1} est un $n+1$-uplet différentiel s'il est de la forme $(a, a^{(1)}, \cdots, a^{(n)})$, pour $a \in K$.

Soit $E \subset K^{m+1}$, on notera $\pi_1(E) := \{x \in K : \exists x_1 \cdots \exists x_m\ (x, x_1, \cdots, x_m) \in E\}$.

Lemme 2.1 *Soit $\mathcal{K}$ une $\mathcal{L}_D$-structure modèle de $CODF$. Soit $S \subset K$ un sous-ensemble $\mathcal{L}_D$-définissable, alors il existe un sous-ensemble $\mathcal{L}$-définissable S^* de S^{alg} tel que S est inclus et dense dans $\pi_1(S^*)$.*

Preuve: Soit $\phi(x)$ une $\mathcal{L}_D$-formule telle que $S = \phi(K)$. Comme $CODF$ a l'élimination des quantificateurs, on peut supposer que la formule $\phi(x)$ est une $\mathcal{L}_D$-formule sans quantificateurs. Soient m l'ordre maximal de la variable x apparaissant dans ϕ, ϕ^* la $\mathcal{L}$-formule sans quantificateurs correspondante et $S^{alg} := \phi^*(K) \subset K^{m+1}$. Comme S^{alg} est un sous-ensemble définissable dans un corps réel-clos, c'est une union finie de cellules C_i, $i \in I$, I fini. Nous allons décrire un procédé qui remplacera chacune de ces cellules C_i par une union finie de sous-cellules où les $m+1$-uplets différentiels seront denses et qui contiendra tous ceux appartenant à C_i.

(i) Si C_i est une cellule ouverte (dans K^{m+1}), alors les $m+1$-uplets différentiels sont denses dans C_i et donc dans ce premier cas, on laissera C_i inchangée.

En effet soit $\bar{a} \in C_i$ et soit l'équation différentielle $X^{(m+1)} = 0$. Alors le $m+2$-uplet $(\bar{a}, 0)$ est une solution de l'équation algébrique $X_{m+2} = 0$ $(\star)$. Comme C_i est une cellule ouverte, il existe $\epsilon > 0$ dans K tel que le pavé ouvert $]a_0 - \epsilon\ \ a_0 + \epsilon[\times \cdots \times]a_m - \epsilon\ \ a_m + \epsilon[$ soit inclus dans C_i. Par l'axiomatisation de $CODF$ rappelée plus haut, il existe un élément $b \in K$ tel que $b^{(m+1)} = 0$ et $\bigwedge_{i=0}^{m} |a_i - b^{(i)}| < \epsilon$. (Le choix de l'équation algébrique $(\star)$ nous assure que le $m+1$-uplet composé de b et de toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre m est proche du $m+1$-uplet $\bar{a}$.)

(ii) Si C_i est une $(0, \cdots)$-cellule et si $a \in \pi_1(C_i)$, alors soit $(a, a^{(1)}, \cdots, a^{(m)}) \in C_i$ et on remplace C_i par $\{(a, a^{(1)}, \cdots, a^{(m)})\}$, sinon on supprime C_i car elle ne comprend aucun $m+1$-uplet différentiel.

(iii) Si C_i est une $(1, \cdots, 1, 0, \cdots)$-cellule, où le premier zéro apparait à la $(j+1)^{ieme}$ position avec $0 < j \leq m$. Alors pour tout $\bar{a}_{j-1} := (a_0, a_1, \cdots, a_{j-1}) \in \pi_j(C_i)$, nous avons que $a_j = f(\bar{a}_{j-1})$, où f est une fonction continue $\mathcal{L}$-définissable. Posons $\bar{a} := (\bar{a}_{j-1}, a_j)$. En utilisant la description des ensembles semi-algébriques rappelée plus haut il existe un polynôme $p[X_1, \cdots, X_{j+1}] \in K[\bar{X}]$ tel que pour tout $\bar{a}_{j-1} \in \pi_j(C_i)$ on ait $p(\bar{a}) = 0$ et $\frac{\partial}{\partial X_{j+1}} p(\bar{a}) \neq 0$. De plus si $\bar{c} := (c_0, \cdots, c_j)$ est proche de $\bar{a}$ et $p(\bar{c}) = 0$, alors $c_j = f(c_0, c_1, \cdots, c_{j-1})$. Par l'axiomatisation de $CODF$, il existe $b \in K$ tel que $(\star\star)$: $p(b, b^{(1)}, \cdots, b^{(j)}) = 0$ et $\frac{\partial}{\partial X_{j+1}} p(b, b^{(1)}, \cdots, b^{(j)}) \neq 0$ avec $\bar{b} := (b, b^{(1)}, \cdots, b^{(j)})$ proche de $\bar{a}$. Ainsi $b^{(j)} = f(b, b^{(1)}, \cdots, b^{(j-1)})$ et donc $\bar{b} \in \pi_{j+1}(C_i)$. La relation $(\star\star)$ implique que $b^{(j+1)}$ (ainsi que ses dérivées successives jusqu'à l'ordre m) peut être exprimé comme une fraction rationnelle de $\bar{b}$. Notons ces fractions rationnelles $g_{j+1}(\bar{x}), \cdots, g_m(\bar{x})$, où $\bar{x} := (x_1, \cdots, x_{j+1})$. On remplace alors C_i par le sous-ensemble $\mathcal{L}$-définissable obtenu en exprimant que $(x_1, \cdots, x_{j+1}, g_{j+1}(\bar{x}), \cdots, g_m(\bar{x})) \in C_i$. On applique le théorème de décomposition cellulaire à cet ensemble semi-algébrique et on note les nouvelles cellules $C^*_{i,k}$, $k \in I_k$.

On réitère les étapes précédentes pour ces nouvelles cellules $C^*_{i,k}$. Si $C^*_{i,k}$ est une $(0, \cdots)$-cellule et si $a \in \pi_1(C^*_{i,k})$, alors soit $(a, a^{(1)}, \cdots, a^{(m)}) \in C^*_{i,k}$, soit on supprime $C^*_{i,k}$. Supposons maintenant que $C^*_{i,k}$ soit une $(1, \cdots, 0, \cdots)$-cellule, où le premier zéro apparaît à la $(\ell+1)^{ieme}$ position, $0 \leq \ell \leq j \leq m$. Si $\ell = j$, les $m+1$-uplets différentiels sont denses dans $C^*_{i,k}$ et dans ce cas on laisse $C^*_{i,k}$ inchangée. Si $0 < \ell < j$, on procède comme dans l'étape (iii). Après au plus j itérations, le processus se termine. De plus, chacune des cellules obtenues qui n'est pas un singleton, est du type $(1, \cdots, 1, 0, \cdots, 0)$, les $m+1$-uplets différentiels y sont denses et tout $m+1$-uplet différentiel de C_i appartient à l'une d'entre elles. On remarque que le nombre de $m+1$-uplets différentiels est fini seulement si toutes les cellules obtenues sont des $(0, \cdots)$-cellules. □

Proposition 2.2 *Soit $\mathcal{K}$ un modèle de $CODF$. Alors $\mathcal{K}$ est (DC).*
Preuve: Soit S un sous-ensemble définissable de K et soit S^* un sous-ensemble $\mathcal{L}$-définissable d'un produit cartésien de K tel que S est inclus et dense dans $\pi_1(S^*)$. Puisque RCF satisfait (DC) et puisque $\pi_1(S^*)$ est $\mathcal{L}$-définissable et les bornes supérieures et inférieures de S sont les mêmes que celles de $\pi_1(S^*)$, on obtient le résultat. □

Proposition 2.3 *Soit $\mathcal{K}$ un modèle de $CODF$. Alors K satisfait (UF).*
Preuve: On utilise le Lemme précédent et sa preuve. Soit $S_{\bar{y}}$ un sous-ensemble de K défini par la formule $\phi(x, \bar{y})$ à paramètres $\bar{y}$.

Par le résultat d'élimination des quantificateurs, on peut supposer que $\phi(x, \bar{y})$ est une formule sans quantificateurs et soit N l'ordre maximal de la variable x apparaissant dans ϕ.

Par hypothèse, $S^{alg}_{\bar{y}}$ est une union finie de cellules $C_{i,\bar{y}}$, $i \in I$ avec I fini. Supposons que $S_{\bar{y}}$ est fini, alors les cellules correspondantes $C^*_{i,k,\bar{y}}$, $k \in I_k$ sont des $(0, \cdots)$-cellules. Comme RCF a (UCD), ce nombre de $(0, \cdots)$-cellules est borné indépendamment de $\bar{y}$. □

Théorème 2.4 *Soit $\mathcal{K}$ un modèle de $CODF$. Alors son coeur ouvert est o-minimal.*
Preuve: Par les deux propositions ci-dessus, $\mathcal{K}$ est (DC) et satisfait (UF). Donc par le Theorème A dans [3], son coeur ouvert est o-minimal. □

Définition 2.5 ([7] Theorem 16.14.) *Une théorie T élimine (fortement) les imaginaires si on peut associer une formule $\psi(\bar{x}, \bar{z})$ à toute formule $\phi(\bar{x}, \bar{a})$, où $\bar{a}$ est un tuple d'éléments dans un modèle $\mathcal{M}$ de T, telle que il y ait dans M un unique tuple $\bar{b}$ d'éléments tels que $\mathcal{M} \models \forall \bar{x}\ (\phi(\bar{x}, \bar{a}) \leftrightarrow \psi(\bar{x}, \bar{b}))$.*

Théorème 2.6 *La théorie $CODF$ élimine les imaginaires.*
Preuve: On utlise le fait que la théorie RCF élimine les imaginaires ([5] Theorem 4.4.4) et la preuve du Lemme 2.1.

Considérons la $\mathcal{L}_D$-formule $\phi(x, y, \cdots, \bar{a})$. Soit $\phi^*(\bar{x}, \bar{y}, \cdots, \bar{a}^*)$ la $\mathcal{L}$-formule correspondante. Par le théorème de décomposition cellulaire dans RCF, $\phi^*(K, \bar{a})$ est une union finie de $(\bar{k}_1, \bar{k}_2, \cdots, \bar{k}_\ell)$-cellules avec $\bar{k}_i$ un n_i+1-uplet de 0 et de 1, où n_i est l'ordre maximal de la i^{ieme} variable apparaissant dans ϕ^*.

On modifie chacune de ces cellules en un nombre fini de sous-cellules relativement ouvertes où les tuples différentiels sont denses et ont une unique prolongation en un tuple différentiel qui appartient à la cellule initiale et enfin tout tuple différentiel de la cellule initiale a une projection dans l'une de ces sous-cellules $(\star)$.

Si $\ell = 1$, on a fait la construction dans le Lemme 2.1, ensuite on procède par induction sur ℓ comme suit.

Supposons que la cellule C apparaisse dans la décomposition cellulaire de $\phi^*(\bar{x}, \bar{y}, \cdots, \bar{a}^*)$. Par le cas $\ell = 1$, en supposant que la longueur de $\bar{k}_1$ est égale à n_1, on décompose $\pi_{n_1}(C)$ en un nombre fini de sous-cellules $C_{k_1,i}$ ayant la propriété $(\star)$. Ensuite on applique l'hypothèse d'induction à chaque fibre de

C au-dessus de $\bar{x} \in C_{k_1,i}$. Notons, puisque nous sommes dans C, que la fibre est une $(k_2, \cdots, k_\ell)$-cellule et donc que la décomposition en un nombre fini de sous-cellules $C_{k_2,\cdots,k_\ell,j}$ ayant la propriété $(\star)$, peut s'exprimer uniformément en $\bar{x}$.

Ensuite on considère le sous-ensemble $\mathcal{L}$-définissable de C qui consiste en l'ensemble des tuples $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \cdots)$ tels que $\bar{x} \in C_{k_1,i}$ et $(\bar{y}, \bar{z}, \cdots) \in C_{k_2,\cdots,k_\ell,j}$. On obtient un nombre fini de cellules que l'on suppose maximalement définissablement connexes. On applique l'élimination des imaginaires à chacune de ces cellules $C_{i,j}$ et on obtient une formule $\xi_{i,j}(\bar{x}, \bar{y}, \cdots, \bar{b}_{i,j})$.

On exprime sur chaque $\bar{b}_{i,j}$ qu'il existe des paramètres tels que l'ensemble définissable $\xi_{i,j}(K, \bar{b}_{i,j})$ est une $(\bar{k}'_1, \bar{k}'_2, \cdots)$-cellule avec $\bar{k}'_i$ un n_i-uplet, de la forme $(1, \cdots, 1, 0, \cdots, 0)$, où les n_i-uplets différentiels sont denses. (En particulier, cet ensemble définissable est localement fermé et définissablement connexe.)

On note la $\mathcal{L}_D$-formule correspondante par $\chi_{i,j}(\bar{b}_{i,j})$ et soit $\bar{b} = (\bar{b}_{i,j})$. Posons $\xi(\bar{x}, \bar{y}, \cdots, \bar{b}) := \bigvee_{i,j} \xi_{i,j}(\bar{x}, \bar{y}, \cdots, \bar{b}_{i,j}) \& \ \bigwedge \chi(\bar{b}_{ij})$. Soit $\phi(x, y, \cdots, \bar{b})$ la formule $\xi(\bar{x}, \bar{y}, \cdots, \bar{b})$ & $\bar{x}, \bar{y}, \cdots$ sont des tuples différentiels.

Supposons qu'il existe un tuple $\bar{c} \neq \bar{b}$ tel que $\phi(x, y, \cdots, \bar{b}) \leftrightarrow \phi(x, y, \cdots, \bar{c})$.

On commence par les cellules de dimension o-minimale maximale. On envoie chaque cellule $C_{i,j}(\bar{b}_{i,j})$ vers une des cellules $C_{i',j'}(\bar{c}_{i',j'})$ de la même dimension avec laquelle elle a une intersection non vide. Puisque $C_{i,j}(\bar{b}_{i,j})$ est définissablement connexe, on ne peut à la fois avoir une intersection non vide avec $C_{i',j'}(\bar{c}_{i',j'})$ et son complément, elle ne peut être strictement incluse dans $C_{i',j'}(\bar{c}_{i',j'})$ puisque maximalement définissablement connexe et donc la seule possibilité restante est qu'elle contient strictement $C_{i',j'}(\bar{c}_{i',j'})$. Montrons que c'est impossible.

Soit les projections $\pi_{n'_1+1}$ de $C_{i,j}(\bar{b}_{i,j})$ et $C_{i',j'}(\bar{c}_{i',j'})$ diffèrent, ou bien il existe un $n'_1 + 1$-uplet $\bar{x} \in \pi_{n'_1+1}(C_{i,j}(\bar{b}_{i,j})$ tel que les fibres correspondantes sont différentes. Notons que si deux $(1, \cdots, 1, 0, \cdots)$-cellules diffèrent, alors elles diffèrent par un ensemble relativement ouvert (qui ne peut être recouvert par un nombre fini de cellules de dimension strictement plus petite).

Dans le premier cas, il existe $\bar{x} \in \pi_{n'_1+1}(C_{i,j}(\bar{b}_{i,j})) - \pi_{n'_1+1}(C_{i,j}(\bar{c}_{i,j}))$. Puisque les tuples différentiels sont denses et que $\pi_{n'_1+1}(C_{i,j}(\bar{b}_{i,j}))$ est localement fermé, il existe un tuple différentiel $\bar{d} := (d, d^{(1)}, \cdots, d^{(n'_1)})$ proche de $\bar{x}$ appartenant à $\pi_{n'_1+1}(C_{i,j}(\bar{b}_{i,j}) - \pi_{n'_1+1}(C_{i,j}(\bar{c}_{i,j})$.

Dans le second cas, il y a un tuple différentiel $\bar{d}$ (dans l'interieur de la projection $\pi_{n'_1+1}(C_{i,j}(\bar{b}_{i,j})))$ au-dessus duquel la fibre dans $C_{i,j}(\bar{b}_{i,j})$ et $\xi(K, \bar{c})$ est différente.

Dans les deux cas, il y a un tuple $(\bar{d}, \bar{u})$ dans $C_{i,j}(\bar{b}_{i,j})$ qui n'appartient pas à $\xi(K, \bar{c})$. A nouveau comme les tuples différentiels sont denses et que $C_{i,j}(\bar{b}_{i,j})$ est localement fermé, il y a un tuple différentiel $(\bar{d}, \bar{e})$ proche de $(\bar{d}, \bar{u})$ dans $C_{i,j}(\bar{b}_{i,j}) - \xi(K, \bar{c})$, une contradiction.

Références

[1] Bochnak J., Coste M., Roy M.-F., Géométrie algébrique réelle, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebeite, 3 Folge, Band 12, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, and New York,1987.

[2] Brihaye T., Michaux C., Rivière C., Cell decomposition and dimension function in the theory of closed ordered differential fields, Ann. Pure Appl. Logic 159 (2009), no. 1-2, 111-128.

[3] Dolich A., Miller C., Steinhorn C., Structures having o-minimal open core, Trans. Amer.Math.Soc. 362, number 3, 2010, 1371-1411.

[4] van den Dries L., Tame topology and o-minimality, London Mathematical Society Lecture Notes Series, cambridge University Press, 1998.

[5] Hodges, W., Model theory, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 42, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[6] Michaux, C., Rivière, C., Quelques remarques concernant la théorie des corps ordonnés différentiellement clos, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 12 (2005), no. 3, 341-348.

[7] Poizat B., A course in Model Theory, Universitext Springer, 2000.

[8] Singer M., The model theory of ordered differential fields, J. Symb. Logic, volume 43, number 1 1978, 82-91.